АГ 14.01.13

$$C: 5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9 = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} F_1: 5x + 4y - 9 = 0 \\ F_2: 4x + 5y - 9 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x = y = 1 \\ C(1,1) \end{array}$$

Смяна на координатната система чрез x и y

$x = X + 1$ $\quad y = Y + 1$ т.е. $K' = XY$

тогава кривата има централно уравнение

$$C: 5X^2 + 8XY + 5Y^2 - 9 = 0$$

Търсим собствените стойности на матрица A_{33}

$$\left|\begin{array}{cc} 5-s & 4 \\ 4 & 5-s \end{array}\right| = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} (5-s)^2 - 16 = 0 \\ 25 - 10s + s^2 - 16 = 0 \\ s^2 - 10s + 9 = 0 \Rightarrow s_1 = 1,\ s_2 = 9 \end{array}$$

разглеждаме случай s_2

полагаме $e_1(\alpha_1, \beta_1)$ и $e_2'(\alpha_2, \beta_2)$ тогава

$$\left|\begin{array}{l} \begin{pmatrix} 5-9 & 4 \\ 4 & 5-9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \beta_1 \\ \alpha_1^2 + \beta_1^2 = 1 \quad \Rightarrow \alpha_1 = \beta_1 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right.$$

Взимаме $\alpha_2 = -\beta_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ и $\beta_2 = \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$

	X	Y
ξ	α_1	β_1
η	α_2	β_2

Правим нова координатна система чрез ξ и η т.е.

$K'' = C\xi\eta$

$$X = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi - \eta) \quad , \quad Y = \frac{1}{2}(\xi + \eta)$$

Заместваме в уравнението

$$C: 9\xi + \eta^2 = 9$$

С ина вида $\quad \frac{\xi^2}{1} + \frac{\eta^2}{9} = 9\,1$

анулираме $y \Rightarrow \frac{\xi^2}{1} = 1 \Rightarrow \xi = 1$

т.е. върх $A_1(1,0)$, върх $A_2(-1,0)$

анулираме $\xi \Rightarrow \frac{\eta^2}{9} = 1 \Rightarrow \eta^2 = 9 \Rightarrow \eta = \pm 3$

т.е. върх $B_1(0,3)$ и върх $B_2(0,-3)$

намираме фокус

$F_1(0, \sqrt{9-1})$ и $F_2(0, -\sqrt{9-1})$

(при случай $S_1 = 1$ спецо)

Осите са $\xi = 0$ и $\eta = 0$

директрисите d_1, d_2: $\eta = \pm\sqrt{2} = \frac{a}{c}$

върховите тангенти t_1, t_2: $\xi = \pm 1$ (през A_1 и A_2)

и $t_3 t_4$: $\eta \pm 3$ (през B_1 и B_2)

за да изразим x и y в началото чрез ξ и η използваме вече разглеждана формула с която сме заменили x и y до ξ и η т.е.

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi - \eta) + 1 \qquad \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\xi - \eta) = X\right)$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi + \eta) + 1 \qquad \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\xi + \eta) = Y\right)$$

за точката A_1 намираме следното уравнение

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(1 - 0) + 1 = \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 \Rightarrow A_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + 1, \frac{1}{\sqrt{2}} + 1\right)$$

за правата $x + y = 1/\sqrt{2}\,\xi + 2$ (да но $\xi = 0$) $\Rightarrow$

$x + y - 2 = 0$

$$C: 9x^2 - 24xy + 16y^2 - 10x - 70y + 125 = 0$$

ако е точен квадрат $(9x^2 - 24xy + 16y^2 = (3x - 4y)^2)$
уравнението е парабола

$$\begin{vmatrix} 9-S & -12 \\ -12 & 16-S \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow S^2 - 25S = 0 \Rightarrow$$
$$S_1 = 0, \; S_2 = 25$$

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 9-0 & -12 \\ -12 & 16-0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} \Rightarrow \; 3\alpha_1 = 4\beta_1 \\ \alpha_1^2 + \beta_1^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 = 4/5, \; \beta_1 = 3/5$$

$$\alpha_2 = -\beta_1 = -3/5, \quad \beta_2 = \alpha_1 = 4/5$$

$$\left.\begin{aligned} x &= 4/5\, X - 3/5\, Y \\ y &= 3/5\, X + 4/5\, Y \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} &25Y^2 - 50X - 50Y + 125 = 0 \;/:25 \\ &Y^2 - 2X - 2Y + 5 = 0 \end{aligned}$$

ротация

$X = \xi + \alpha, \; Y = \eta + \beta \Rightarrow$ заместваме

$\eta^2 + 2\eta\beta + \beta^2 - 2\xi - 2\alpha - 2\eta - 2\beta + 5 = 0 \Rightarrow$
$\alpha = 2, \; \beta = 1$ тогава $C(2, 1)$

$\mathcal{U}'' = C\xi\eta \Rightarrow \quad c: \eta^2 = 2\xi$
$\mathcal{U}$ $\xi^2 = 2p\alpha, \; p = 1 \Rightarrow p/2$

$F\left(\frac{1}{2}, 0\right)$
$d: \xi = -1/2 = -p/2$ $\quad$ $\mathcal{U}$ спрямо $A(0\,0)$